

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра прикладної математики

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Декан факультету
математики і інформатики

Григорій ЖОЛТКЕВИЧ

29 серпня 2024 р.



РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Функціональний аналіз

рівень вищої освіти _____ перший (бакалаврський) рівень

галузь знань _____ 11 – Математика та статистика

спеціальність _____ 113 Прикладна математика

освітня програма _____ Прикладна математика

спеціалізація _____

вид дисципліни _____ обов'язкова

факультет _____ математики і інформатики

2024 / 2025 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження Вченою радою факультету математики і інформатики

“27” серпня 2024 року, протокол № 8

РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ: **Коробов Валерій Іванович**, доктор фіз.-мат. наук, професор закладу вищої освіти, завідувач кафедри прикладної математики.

Програму схвалено на засіданні кафедри прикладної математики
Протокол від “26” серпня 2024 року № 8

Завідувач кафедри прикладної математики



Валерій КОРОБОВ

Програму погоджено з гарантом
освітньо-професійної програми «Прикладна математика»

Гарант освітньо-професійної програми «Прикладна математика»



Сергій ПОСЛАВСЬКИЙ

Програму погоджено науково-методичною комісією
факультету математики і інформатики

Протокол від “27” серпня 2024 року № 1

Голова науково-методичної комісії факультету математики і інформатики



Євген МЕНЯЙЛОВ

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «Функціональний аналіз» складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки бакалавра спеціальності 113 Прикладна математика

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Мета викладання навчальної дисципліни

Метою викладання навчальної дисципліни «Функціональний аналіз» є навчання майбутніх спеціалістів сучасним методам функціонального аналізу.

1.2. Основні завданнями вивчення дисципліни

Основними завданнями вивчення дисципліни «Функціональний аналіз» є оволодіння майбутніми спеціалістами основами функціонального аналізу та здатність застосовувати методи функціонального аналізу до розв'язання конкретних задач.

1.2.1. Формування наступних інтегральної та загальних компетентностей

ІК01. Здатність розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми прикладної математики у професійній діяльності або у процесі навчання, що передбачає застосування математичних теорій та методів і характеризується комплексністю та невизначеністю умов.

ЗК06. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

1.2.2. Формування наступних фахових компетентностей

ФК01. Здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем.

ФК02. Здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі.

ФК17. Здатність розуміти математичні доведення, запропонувати оригінальні доведення, встановлювати їх правильність і отримувати висновки.

1.3. Кількість кредитів – 4

1.4. Загальна кількість годин – 120

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
<u>обов'язкова</u>	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
3-й	–
Семестр	
6-й	–
Лекції	
32 год.	–
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	–
Лабораторні заняття	
–	–
Самостійна робота	
56 год.	–
у тому числі індивідуальні завдання	
2 год.	

1.6. Заплановані результати навчання

знати :

основні властивості метричних, лінійних, нормованих, гільбертових просторів, означення та приклади лінійних функціоналів та операторів, основні теореми функціонального аналізу – теорему Хана-Банаха, теорему Банаха про обернений оператор та теорему Банаха-Штейнгауза – та їх наслідки; означення та приклади спектру лінійного оператора, загальний вигляд лінійних функціоналів в конкретних просторах;

вміти:

розв'язувати задачі за вивченими розділами.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні досягти таких програмних результатів навчання:

РН02. Володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь у частинних похідних, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів, чисельними методами.

РН21. Демонструвати розуміння загальних принципів побудови математичних теорій, основних понять логіки, уміти формулювати та доводити математичні твердження.

РН22. Уміти отримувати змістовні висновки, наводити та аналізувати приклади і контрприкладів, перевіряти і обґрунтовувати правильність застосованих міркувань і отриманих розв'язків.

2. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Основні простори та їх властивості

Тема 1. Метричні простори.

Метричні простори. Принцип стислих відображень. Компактні множини в метричних просторах. Теорема Вейєрштрасса. Поповнення метричних просторів.

Тема 2. Нормовані простори.

Нормовані простори. Лема Рісса. Некомпактність кулі в банахових просторах.

Тема 3. Гільбертові простори.

Гільбертові простори, розклад у пряму суму підпросторів. Ортонормовані системи. Ряди Фур'є. Нерівність Бесселя. Рівність Парсеваля. Критерій збіжності ряду Фур'є до елемента x . Теорема Рісса-Фішера.

Розділ 2. Лінійні обмежені оператори у нормованих просторах

Тема 4. Лінійні обмежені оператори.

Лінійні обмежені оператори. Норма лінійного оператора. Розширення лінійного оператора за неперервністю. Простір лінійних неперервних операторів $[X, Y]$. Повнота простору лінійних операторів.

Тема 5. Принцип рівномірної обмеженості.

Принцип рівномірної обмеженості. Теорема Банаха-Штейнгауза. Застосування теореми Банаха-Штейнгауза.

Тема 6. Зворотний оператор.

Зворотний оператор. Критерій існування обмеженого зворотного оператора. Зворотність оператора, що близький до одиничного. Теорема Банаха про зворотний оператор. Принцип відкритості відображення. Замкнені оператори. Спектр і резольвента лінійного оператора. Теорема Банаха про зворотний оператор.

Розділ 3. Лінійні обмежені функціонали

Тема 7. Теорема Хана-Банаха.

Опуклі функціонали. Функціонал Мінковського. Теорема Хана-Банаха про продовження лінійного функціонала в дійсному лінійному просторі. Теорема Хана-Банаха в нормованому просторі. Відокремлюваність опуклих множин у нормованому просторі.

Тема 8. Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів.

Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів у R^n , H , $C[a,b]$, l_p . Вкладення X в X^{**} . Спряжені оператори, слабка збіжність елементів.

3. Структура навчальної дисципліни

Назви модулів і тем	Кількість годин					
	Денна форма					
	Усього	у тому числі				
л		п	лаб	інд	ср	
1	2	3	4	5	6	7
Розділ 1. Основні простори та їх властивості						
Тема 1. Метричні простори. Принцип стислих відображень. Компактні множини в метричних просторах. Теорема Вейерштрасса. Поповнення метричних просторів.	12	4	5			3
Тема 2. Нормовані простори. Лема Рісса. Некомпактність кулі в банахових просторах.	11	3	3			5
Тема 3. Гільбертові простори, розклад у пряму суму підпросторів. Ортонормовані системи. Ряди Фур'є. Нерівність Бесселя. Рівність Парсеваля. Критерій збіжності ряду Фур'є до елемента x . Теорема Рісса-Фішера.	7	3	2			2
Разом за розділом 1	30	10	10			10
Розділ 2. Лінійні обмежені оператори у нормованих просторах						
Тема 4. Лінійні обмежені оператори. Норма лінійного оператора. Розширення лінійного оператора за неперервністю. Простір лінійних неперервних операторів $[X, Y]$. Повнота простору лінійних операторів.	19	4	5			10
Тема 5. Принцип рівномірної обмеженості. Теорема Банаха-Штейнгауза. Застосування теореми Банаха-Штейнгауза.	13	2	5			6

Тема 6. Обернений оператор. Існування обмеженого оберненого оператора. Оберненість оператора, що близький до одиничного. Теорема Банаха про обернений оператор. Принцип відкритості відображення. Замкнені оператори. Спектр і резольвента лінійного оператора.	17	6	5			6
<i>Колоквіум</i>	4	2				2
<i>Індивідуальне завдання</i>	2					2
Разом за розділом 2	55	14	15			26
Розділ 3. Лінійні обмежені функціонали						
Тема 7. Опуклі функціонали. Функціонал Мінковського. Теорема Хана-Банаха про продовження лінійного функціонала в дійсному лінійному просторі. Теорема Хана-Банаха в нормованому просторі. Відокремлюваність опуклих множин у нормованому просторі.	16	3	3			10
Тема 8. Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів у $R^n, H, C[a, b], l_p$. Вкладення X в X^{**} . Спряжені оператори, слабка збіжність елементів.	15	5	2			8
<i>Контрольна робота</i>	4		2			2
Разом за розділом 3	35	8	7			20
Усього годин	120	32	32			56

4. Теми практичних занять

№	Назва розділу або теми	Кількість годин
1	Метричні простори. Принцип стислих відображень.	2
2	Компактні множини в метричних просторах.	2
3	Поповнення метричних просторів. Нормовані і банахові простори.	2
4	Гільбертові простори.	2
5	Ортонормовані системи. Ряди Фур'є, збіжність. Нерівність Бесселя. Рівність Парсеваля.	2
6	Лінійні оператори.	2
7	Обмежені оператори в гільбертових просторах. Норма лінійного оператора.	2
8	Простір лінійних обмежених операторів $[X, Y]$. Принцип рівномірної обмеженості.	2
9	Застосування теореми Банаха-Штейнгауза.	2
10	Обернений оператор. Існування обмеженого оберненого оператора. Оберненість оператора, що близький до одиничного.	2
11	Замкнені оператори. Принцип відкритості відображення.	2

12	Спектр і резольвента лінійного оператора.	2
13	Опуклі функціонали. Функціонал Мінковського.	2
14	Теорема Хана-Банаха про продовження лінійного функціонала. Відокремлюваність опуклих множин у нормованому просторі.	2
15	Загальний вигляд функціоналів у R^n , H , $C[a,b]$, l_p . Спряжені оператори, слабка збіжність елементів.	2
16	<i>Контрольна робота</i>	2
	<i>Всього годин</i>	32

5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
1	Вивчення матеріалу лекцій, підготовка до практичних занять	52
2	Підготовка до колоквіуму	2
3	Виконання індивідуального завдання	2
	Разом	56

6. Індивідуальне завдання

Студенту пропонується одне індивідуальне завдання за одною з наступних тем:

Компактні множини в метричних просторах.
Теорема Вейерштрасса. Поповнення метричних просторів.
Лема Рісса. Некомпактність кулі в банахових просторах.
Нерівність Бесселя. Рівність Парсеваля.
Теорема Рісса-Фішера.
Повнота простору лінійних операторів. Приклади.
Застосування теореми Банаха-Штейнгауза.
Замкнені оператори. Спектр і резольвента лінійного оператора.
Теорема Банаха про зворотний оператор.
Функціонал Мінковського.
Спряжені оператори.

7. Методи навчання

Використовуються пояснювально-ілюстративний (лекції і практичні заняття), репродуктивний (виконання домашніх завдань) і частково-пошуковий (індивідуальне завдання) методи.

8. Методи контролю

- перевірка виконання домашніх завдань, індивідуального завдання,
- проведення колоквіуму,
- проведення контрольної роботи,
- проведення екзамену.

9. Схема нарахування балів

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання							Екзамен	Сума
Розділ 1	Розділ 2	Розділ 3	Контрольна робота	Індивідуальне завдання	Колоквіум	Разом		
T1–T3	T4–T6	T7–T8						
10	10	10	5	5	20	60	40	100

T1, ..., T8 – теми розділів.

Мінімальна кількість балів з навчальної дисципліни, яку здобувач вищої освіти повинен набрати під час поточного контролю, самостійної роботи, індивідуального завдання для допуску до складання підсумкового контролю (екзамену), не передбачена програмою.

Критерії оцінювання

Поточний контроль: бали нараховуються за виконання домашніх завдань і активність під час лекційних та практичних занять.

Контрольна робота передбачає розв'язання однієї задачі. При розв'язанні задачі обов'язково слід наводити аргументи, доведення та обґрунтування своїх міркувань, вміти давати пояснення та спиратися на відповідні теоретичні факти, які використовуються. Якщо робота містить помилки, бал може бути знижений.

Індивідуальне завдання передбачає письмову відповідь на одне питання з наступного переліку:

Компактні множини в метричних просторах.

Теорема Вейерштрасса. Поповнення метричних просторів.

Лема Рісса. Некомпактність кулі в банахових просторах.

Нерівність Бесселя. Рівність Парсеваля.

Теорема Рісса-Фішера.

Повнота простору лінійних операторів. Приклади.

Застосування теореми Банаха-Штейнгауза.

Замкнені оператори. Спектр і резольвента лінійного оператора.

Теорема Банаха про зворотний оператор.

Функціонал Мінковського.

Спряжені оператори.

При розкритті обраної теми студент має наводити доведення, обґрунтування міркувань, пояснювальні приклади. Якщо зміст питання не повністю розкритий або відповідь містить помилки, бал може бути знижений.

Колоквіум передбачає письмову відповідь на два питання зі списку, який студентам надається їх лектором. Питання включають той матеріал, який студенти вивчали на момент здачі колоквіуму. До кожного питання обов'язково наводити доведення, обґрунтування міркувань, пояснювальні приклади. Якщо зміст питань не повністю розкритий або робота містить помилки, бал може бути знижений.

Оцінювання та нарахування балів за контрольну роботу, індивідуальне завдання та колоквіум нараховуються таким чином:

- максимальний бал у разі правильно обґрунтованої відповіді;
- за незначні помилки оцінка зменшується від 10 до 30 відсотків;
- за значні логічні помилки оцінка зменшується до 50 відсотків, якщо хід розв'язання в цілому правильний,

- у разі частково правильних міркувань за відсутності обґрунтованої відповіді виставляється до 30 відсотків від максимальної кількості балів
- відповідь не відповідає жодному з критеріїв, які сформульовані вище, – виставляється 0 балів.

Шкала оцінювання: чотирирівнева

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка
90 – 100	відмінно
70-89	добре
50-69	задовільно
1-49	незадовільно

10. Рекомендована література

Основна література

1. С. Банах. Курс функціонального аналізу (лінійні операції).
2. Ю. М. Березанський, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. Функціональний аналіз: підручник. - Львів : Видавець І.Е. Чижиков, 2014. - 229 с.
3. Т.В. Боярищева, Т.В. Гудивок, О.О. Погоріляк. Функціональний аналіз. - Навчальний посібник для студентів спеціальностей “математика”, “прикладна математика”, “статистика”. - Ужгород, 2013. - 125 с.
4. Городній М.Ф., Константинов О.Ю., Нестеренко О.Н., Чайковський А. В. Навчальні завдання до практичних занять з функціонального аналізу. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2006. – 103 с.
5. Константинов О.Ю., Кукуш О.Г., Мішура Ю.С., Нестеренко О.Н., Чайковський А.В. Збірник задач з функціонального аналізу. Компактні оператори. Інтегральні рівняння. Узагальнені функції – К.: ВПЦ "Київський університет", 2005. -126 с.
6. Константинов О.Ю., Мішура Ю.С., Нестеренко О.Н., Чайковський А.В. Збірник задач з функціонального аналізу. Частина І. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2004.-123 с.